MAI 1 – řešení 3. domácího úkolu

(je to jen moje verse řešení, třeba máte i lepší nápady)

1. Dokažte (užitím definice limity posloupnosti)

a) $\overset{?}{\lim_{n\to\infty}} \frac{n+1}{n} = 1$, tj. máme dokázat, že platí:

$\forall \varepsilon>0\ \exists n_0\ \forall n>n_0:\ \left|\frac{n+1}{n}-1\right|<\varepsilon$, tj. $\left|\frac{1}{n}\right|<\varepsilon$

$\left(\cdot\ \frac{n+1}{n} = 1+\frac{1}{n}\right)$

zvolme tedy $\varepsilon>0$; aby $\frac{1}{n}<\varepsilon$, stačí vzít $n>\frac{1}{\varepsilon}$;
tj. vezmeme (nějaké) $n_0>\frac{1}{\varepsilon}$, $n_0\in N$ (jistě existuje),
a pak, je-li $n>n_0>\frac{1}{\varepsilon}$, je $\frac{1}{n}<\varepsilon$ cbd. ∇

b) $\overset{?}{\lim} \sqrt{n} = +\infty$, tedy máme dokázat (dle definice nevlastní limity ∞), že platí:

$\forall K\in R\ \exists n_0\ \forall n>n_0:\ \sqrt{n}>K$

pro $K\le 0$ je toto zřejmé ($\sqrt{n}>0$), zvolme tedy $K>0$: pak, aby $\sqrt{n}>K$, stačí vzít $n>K^2$; a opět (jako v a)) ex. $n_0>K^2$, $n_0\in N$, a pak, je-li
$n>n_0>K^2$, je $\sqrt{n}>K$ ($\sqrt{x}$ je rostoucí fce)

c) $\overset{?}{\lim_{n\to\infty}} \frac{2^n}{n!} = 0 \iff \overset{?}{\forall} \varepsilon>0\ \exists n_0\ \forall n>n_0:\ \left|\frac{2^n}{n!}\right|<\varepsilon$ (*)

Vidíme zde, že situace s „nalezením" n_0 je zde dost „horší" než v a), a b) – ukážeme, jak si „to" zjednodušit (vlastně vyrobíme „policajta" v daném příkladu, ne věta o VOS je to obecně – a to je jednodušší úkol)

Zjednodušení „nalezení" n_0 pro (*) odhadem členu posloupnosti
(často se toto udělat „hodí")

zde: $\frac{2^n}{n!} = \frac{2 \cdot 2 \cdots 2 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdots (n-1)\, n} \leq 2 \cdot \frac{2}{n} = \frac{4}{n}$,

k $\varepsilon > 0$ pak stačí najít n_0 tak, aby pro $n > n_0$ platilo $\frac{4}{n} < \varepsilon$

tj. vezmeme $n_0 > \frac{4}{\varepsilon}$, a pak, je-li $n > n_0$, je $\frac{4}{n} < \frac{4}{n_0} < \varepsilon$,

pro $n > n_0$ tedy i $\left|\frac{2^n}{n!}\right| = \frac{2^n}{n!} \leq \frac{4}{n} < \varepsilon$, což jsme měli ukázat.

A doporučení – zkusit „vypočet" $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^n}{n!}$ užitím VOS:

snadné: $0 \leq \frac{2^n}{n!} \leq \frac{4}{n}$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{4}{n} = 0 \underset{\text{VOS}}{\Longrightarrow}$

$\Longrightarrow$ existuje i $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^n}{n!}$ a $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^n}{n!} = 0$

d) a podobně lze i ukázat, že $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$:

odhad: $0 < \frac{n!}{n^n} = \frac{1 \cdot 2 \cdots (n-1)\, n}{n \cdot n \cdots n \cdot n} \leq \frac{1}{n}$, $n \in N$ (**)

zvolíme-li $\varepsilon > 0$, pak najdeme n_0 tak, aby $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$,

a pak tedy pro $n > n_0$ je $\frac{n}{n^n} \leq \frac{1}{n} < \varepsilon$ (cbd.)

A užití „strážníků":

v (**) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \underset{\text{VOS}}{\Longrightarrow}$ tj. $\lim \frac{n!}{n^n} = 0$.

e) ? $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

$n \geq 2$: $\sqrt[n]{n} > 1$, tedy lze „napsat" $\sqrt[n]{n} = 1 + h_n$, $h_n > 0$

a tedy ukážeme, že $\lim\limits_{n\to\infty} h_n = 0$, je důkaz hotov (AL).

Zkusme: $\sqrt[n]{n} = 1+h_n$, pak $n = (1+h_n)^n \geq 1 + nh_n + \binom{n}{2}h_n^2$

tj. $n \geq \frac{n(n-1)}{2} h_n^2$

a odtud máme $h_n^2 < \frac{2}{n-1}$, tj. $h_n < \sqrt{\frac{2}{n-1}}$

(a možné užít i VOS, neboť $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{\frac{2}{n-1}} = 0$).

a dle definice (odkud opět pro „jednodušší" postup)

zvolme $\varepsilon > 0$, pak má-li být $\lim h_n = 0$,

je třeba najít $n_0 \in N$ tak, že pro $n > n_0$ je $(0<)\, h_n < \varepsilon$;

najdeme n_0 pro $\left(\sqrt{\frac{2}{n-1}}\right)$, tj. $\sqrt{\frac{2}{n-1}} < \varepsilon$, tedy

$\frac{n-1}{2} > \frac{1}{\varepsilon^2}$, tj. $n_0 > \frac{2}{\varepsilon^2} + 1$ (a takové n_0 existuje),

pak $n > n_0 > \frac{2}{\varepsilon^2} + 1 \Rightarrow h_n < \sqrt{\frac{2}{n-1}} < \varepsilon$, cbd.

(2) Dokažte, že platí:

a) $\lim a_n = +\infty \Rightarrow \lim \frac{1}{a_n} = 0$

platí: k lib. $K > 0$ existuje n_0 tak, že pro $n > n_0$ je

$a_n > K > 0$, tj. $\frac{1}{a_n}$ je def. (a nemusíme

předpokládat, že $a_n > 0$ pro vš. $n \in N$

(limita posloupnosti nezávisí na konečně mnoha a_n)

a co máme dokázat? Že platí:

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \ \forall n > n_0 : \quad \left|\frac{1}{a_n}\right| < \varepsilon$, tj. dle naší poznámky

$$\frac{1}{a_n} > \varepsilon$$

Zvolme tedy $\varepsilon > 0$; pak platí dle předpokladu

ke $K = \frac{1}{\varepsilon}$ ex. $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro $n > n_0$ je $a_n > K = \frac{1}{\varepsilon}$,

tedy $\frac{1}{a_n} < \varepsilon$ (cbd.)

b) ? $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n} = a \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n+1} = a \implies \lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

Víme: (1) $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n} = a \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_1 \ \forall n > n_1 : \ |a_{2n} - a| < \varepsilon$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n+1} = a \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_2 \ \forall n > n_2 : \ |a_{2n+1} - a| < \varepsilon$

Máme ukázat, že platí:

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \ \forall n > n_0 : \quad |a_n - a| < \varepsilon$

Stačí vzít např. $n_0 = \max(2n_1, 2n_2 + 1)$, a pak pro $n > n_0$ platí buď (1) (pro n-sudé) nebo (2) (n-liché), tj. je $|a_n - a| < \varepsilon$ (cbd.)

c) (1) $\exists n_0 \ \forall n > n_0 : \ a_n \le b_n$; (2) $\lim a_n = +\infty \implies$

$\implies \lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$

Pak: (i) $\lim n(2 - \sin n) = +\infty$, neboť $n(2 - \sin n) \ge n \ \forall n$ a $\lim\limits_{n\to\infty} n = +\infty$

(ii) $\lim (n^2 + \cos n) = +\infty$, neboť $n^2 + \cos n \geq n^2 - 1$
a $\lim\limits_{n\to\infty} (n^2 - 1) = +\infty$ (AL)

<u>Důkaz:</u>

víme, že (1) $a_n \leq b_n$, $n \geq n_0$

(2) $\lim a_n = +\infty$, tj. $\forall K \; \exists n_1 \; \forall n > n_1 : a_n > K$

a máme ukázat, že $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$, tj. že platí:

$$\underline{\forall K \; \exists n_2 \; \forall n > n_2 : \; b_n > K}$$

Zvolme tedy K; pak z (2) ex. n_1 tak, že $a_n > K$
a z (1) ex. n_0 tak, že $b_n \geq a_n$ pro $n > n_0$

Vezmeme-li tedy $n_2 = \max(n_0, n_1)$, platí (1) i (2), a
tedy pro $n > n_2$ je $b_n \geq a_n > K$ (cbd.)

3 Máme ukázat, že pro $a \in (0,1)$ je $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$
za pomoci toho, že víme (ze cvičení) $\lim \sqrt[n]{a} = 1$
pro $a \in (1, +\infty)$.

<u>Dk:</u> $a \in (0,1) \Rightarrow \frac{1}{a} \in (1, +\infty)$ a tedy

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{a}} \left(= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{a}}\right) = 1$$, a tedy,

užitím aritmetiky limit

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{1}{\sqrt[n]{a}}} = \frac{1}{1} = 1 \quad \text{(cbd.)}$$

(4) a) $\lim\limits_{n\to\infty} \underbrace{\left(\frac{1}{n^2+1}+\frac{1}{n^2+2}+\dots+\frac{1}{n^2+n}\right)}_{a_n} = 0$

Užijeme VOS:

$$\frac{n}{n^2+n} \le a_n \le \frac{n}{n^2}, \quad \forall n$$

a $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}=0$, stejně tak $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n^2+n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\cancel{n}}{n^{\cancel{2}}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}=0$,

(neboť $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}=0$ (a užijeme AL)

(i $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}=0$)), tedy i $\lim a_n = 0$ (VOS)

Poznámka: nelze užít toho, že pro každé $k=1,2..n$ je $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2+k}=0$ („$=\frac{1}{\infty}$"), neboť zde nelze užít aritmetika pro výpočet limity součtu (počet sčítanců „roste" s rostoucím n) – a to je vidět zvláště v příkladu b)!

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \underbrace{\left(\frac{1}{n+\sqrt{1}}+\frac{1}{n+\sqrt{2}}+\dots+\frac{1}{n+\sqrt{n}}\right)}_{a_n} = 1$, neboť

$$\frac{n}{n+\sqrt{n}} \le a_n \le \frac{n}{n+\sqrt{n}} \le 1$$

a $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n+\sqrt{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\cancel{n}\,1}{\cancel{n}\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)} = 1$ $\left(\lim \frac{1}{\sqrt{n}}=0\right)$

a tedy (opět užitím VOS) je i $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$.

K řešení „dobrovolných" příkladů

ⓐ Je dána rekurentní posloupnost (a_n), kde

$$a_1 = 10\,; \quad a_{n+1} = 6 - \frac{5}{a_n} \qquad (1).$$

Ukažte, že $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 5$.

(i) Pokud $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L \in R$, a $L \neq 0$, lze v (1) „přejít" k limitě (užijeme AL) a z jednoznačnosti limity pak dostaneme: $L = 6 - \frac{5}{L}$,

a odtud (snadnými úpravami) – $L^2 - 6L + 5 = 0$,

tj. $L = 5$ nebo $L = 1$.

(ii) Jak ale ukážeme, že $\lim a_n = 5$ – podaří se to, kdybychom ukázali, že (a_n) je monotónní a omezená zdola číslem 5, pokud by byla klesající (nebo rostoucí a omezená shora 5)

pokus: $a_1 = 10$, $a_2 = 6 - \frac{5}{10} = 5\frac{1}{2}$; $a_3 = 6 - \frac{5}{\frac{11}{2}} = 6 - \frac{10}{11} > 5$

Zkusme tedy ukázat:

1) $a_n \geqq 5$ 2) a_n je klesající posloupnost

(1) důkaz indukcí: $a_1 = 10 > 5$,
nechť $a_n > 5$, pak platí i $a_{n+1} > 5$?

tj. ? $a_{n+1} = 6 - \frac{5}{a_n} > 5$ → tj. $6a_n - 5 > 5a_n$

tj. ? $a_n > 5$ – ale toto byl indukční předpoklad !

tedy máme : (1) $a_n > 5 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

a (2) ? chceme ukázat, že (a_n) je klesající, tj. máme ukázat, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $a_{n+1} < a_n$,

? – $\forall n \in \mathbb{N}$ platí : $6 - \frac{5}{a_n} < a_n \qquad | \cdot a_n > 0$

$$6a_n - 5 < a_n^2$$

tedy má být : $a_n^2 - 6a_n + 5 > 0$,

ale to platí pro $a_n > 5$ – což jsme ukázali

(nebo pro $a_n < 1$ – to nemáme a nepotřebujeme)

(viz (i))

Tedy důkaz je hotov – (i) platí, neboť (a_n) má vlastní a nenulovou limitu ($a_n > 5 \ \forall n \Rightarrow L \geq 5$)

(b) Nechť $a_n \geq 0$ pro $n \in \mathbb{N}$, pak posloupnost (S_N), kde $S_N = \sum_1^N a_n$ konverguje nebo $\lim S_N = +\infty$

1) posloupnost (S_N) je neklesající ($a_n \geq 0$) a tedy dle věty o limitě monotónní posloupnosti má buď vlastní limitu (tj. konverguje), pokud je shora omezená, nebo, pokud není (S_N) shora omezená, je $\lim\limits_{N\to\infty} S_N = +\infty$.

ⓒ Je-li $0 \leq a_n \leq b_n$, a $\lim_{N\to\infty} \sum_1^N b_n \in R$, pak také posloupnost $(\sum_1^N a_n)$ má vlastní limitu.
(kritérium pro konvergenci řad – tzv. srovnávací kritérium pro řady s nezápornými členy)

Dk. označme $s_N = \sum_1^N a_n$, $\sigma_N = \sum_1^N b_n$;

potom (1) z předpokladu b) plyne, že ex. $\lim s_N = s$

a (2) $s_N \leq \sigma_N$, (σ_N) má vlastní limitu dle předpokladu, tedy posloupnost (σ_N) je omezená, tedy ex. $c > 0$ tak, že $\sigma_N \leq c$ $\forall N$, tedy i z (2)

(3) $s_N \leq \sigma_N < c$, $\forall N$, posloupnost (s_N) je tedy omezená, tedy má vlastní limitu (je také neklesající)

A odtud také plyne:

když $a_n \leq b_n$, $\forall n \in N$, a $\lim_{N\to\infty} \sum_1^N a_n = +\infty \Rightarrow$

$\Rightarrow \lim_{N\to\infty} \sum_1^N b_n = +\infty$

a nakonec:

d) (i) $\sum_1^\infty \frac{1}{n\,2^n}$ je konvergentní řada, neboť

(1) $\frac{1}{n\,2^n} \leq \frac{1}{2^n}$, $n \in N$

(2) $\sum_1^\infty \frac{1}{2^n}$ je konvergentní geometrická řada

(ii) $\sum_1^\infty \frac{1}{n!}$ je konvergentní řada, neboť

$$\frac{1}{n!} = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n} \leq \frac{1}{2^{n-1}},$$

a (stejně jako v (i)) i $\sum_1^\infty \frac{1}{2^{n-1}}$ konverguje